АРХИВ

К ИСТОРИИ ВОПРОСА ОБ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В этом выпуске журнала раздел «Архив» посвящен некоторым фактам истории развития теории ударных волн от сложных перипетий ее возникновения в начале второй половины XIX столетия до создания основ современной теории Рэнкиным и Гюгонио в 70-90 гг. этого же столетия.

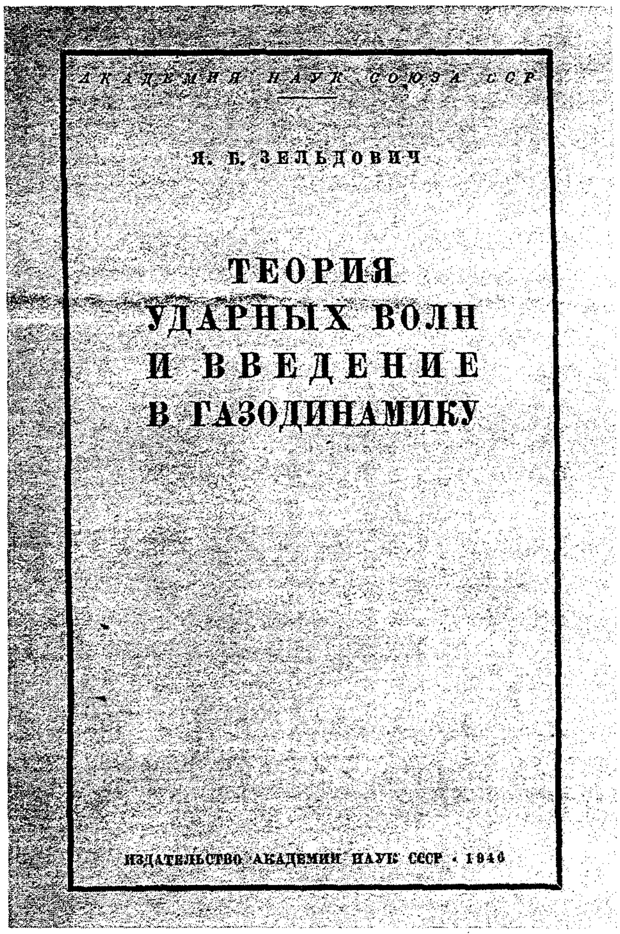
Раздел состоит из двух частей.

Первая часть представляет собой перепечатку двух параграфов из небольшой книги Я.Б. Зельдовича «Теория ударных волн и введение в газодинамику» (Изд. АН СССР, М.-Л., 1946, 185 стр.). Книга эта, написанная выдающимся и весьма разносторонним ученым, несмотря на ее вводный характер, содержит новые для своего времени важные идеи, существенно повлиявшие на развитие газовой динамики во второй половине XX столетия.

Печатаемый ниже §X этой книги посвящен собственно истории вопроса об ударной волне; ему предпослан §VIII, который содержит лаконичный вывод адиабаты Гюгонио из законов сохранения, - этот параграф необходим при чтении §X.

Дополняет приведенный текст список цитируемой в нем литературы.

Вторая часть раздела в основном посвящена связанному с именем Дж. Г. Стокса любопытнейшему моменту в истории создания и развития теории ударных волн и возникновения самого представления о разрывных движениях. К сожалению, этот момент не был отражен ни в книге Я.Б. Зельдовича, ни до настоящего времени вообще в каком-либо еще издании на русском языке.


АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ

ТЕОРИЯ УДАРНЫХ ВОЛН И ВВЕДЕНИЕ В ГАЗОДИНАМИКУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР • 1946

§ VIII. Адиабата Гюгонио. Вывод ее из уравнений сохранения

Рассмотрим распространяющуюся по газу ударную волну. Здесь нас не интересует точная структура фронта ударной волны. Мы предполагаем только, что если на самом деле

62

и нет разрыва в строгом смысле слова (рис. 23*а*), то во всяком случае все изменение давления, плотности и т. п. происходит в очень узкой области (рис. 23*б*).

В элементарном выводе мы ограничимся рассмотрением состояния вещества до и после прохождения через него волны, применяя к этим состояниям уравнения сохранения. При этом мы предполагаем, что сама область волны $A—B$ (рис. 23*б*) не растет с течением времени, вследствие чего значения давления, плотности и других величин внутри самого „разрыва", растянутого на длину AB, должны будут выпасть при составлении уравнений сохранения, поскольку волна перемещается, но количество вещества, количество энергии, количество движения, заключенные в волне между плоскостями A и B, малы, и изменением их во всяком случае можно пренебречь.

Рис. 23. Идеализированная (*а*) и истинная (*б*) структура ударной волны.

Для простоты перейдем к системе координат, движущейся *вместе с ударной волной, иными* словами, будем рассматривать покоящуюся волну, в которую, с одной стороны, через плоскость A втекает вещество в состоянии, обозначаемом индексом 1, а с *другой* стороны, справа вытекает вещество, все величины для которого отметим индексом 2. Для принятых контрольных поверхностей составим уравнения сохранения. Мы примем при этом, что вещество движется нормально к поверхности волны.[1]

Скорость u_1 — скорость, с которой вещество втекает в покоящуюся ударную волну, — совпадает, очевидно, со скоростью распространения волны относительно несжатого исходного вещества, которую часто обозначают D. Скорость u_2 есть скорость движения волны относительно сжатого в волне вещества. Наконец, разность $u_1 - u_2$, не зависящая от выбора движущейся или покоящейся системы координат, равна изменению скорости движения газа при прохождении волны; в частности, в системе, в которой исходное вещество (индекс 1) покоится, величина скорости после прохождения волны

$$|u| = u_1 - u_2; \quad u_2 = D - |u|. \qquad \text{(VIII-1a)}$$

[1] Скорость движения, тангенциального к поверхностям A и B, должна сохраниться при прохождении вещества через волну, как по величине, так и по направлению. Следовательно, тангенциальное движение может быть полностью исключено из рассмотрения соответствующим выбором равномерно движущейся системы координат.

63

Приравнивая количество втекающего в единицу времени вещества количеству вытекающего, получим первое уравнение:

$$\varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2. \qquad \text{(VIII-1)}$$

Далее составим для объема, заключенного между A и B, выражение *II закона движения Ньютона*, приравнивая изменение количества движения в единицу времени импульсу сил давления. Втекающее в единицу времени количество вещества $\varrho_1 u_1$ обладает скоростью u_1, так что втекающее в единицу времени количество движения равно $\varrho_1 u_1^2$. Разность количества движения вытекающей жидкости $\varrho_2 u_2^2$ и количества движения втекающей жидкости (т. е. приращение количества движения) должна равняться импульсу сил давления, который составляет, также на единицу поверхности, $p_1 - p_2$. Так мы получаем второе уравнение сохранения:

$$p_1 + \varrho_1 u_1^2 = p_2 + \varrho_2 u_2^2. \qquad \text{(VIII-2)}$$

Наконец, составим уравнение сохранения энергии. В нем мы должны будем учесть три пары величин: внутреннюю энергию втекающего и вытекающего вещества, кинетическую энергию того и другого и работу, производимую силами давления на контрольные поверхности A и B. Окончательно, количество втекающей энергии вместе с работой, производимой силами давления на поверхности A, равно

$$\varrho_1 u_1 \left(E_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) + p_1 u_1 = \varrho_1 u_1 \left(E_1 + \frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{u_1^2}{2}\right) =$$
$$= \varrho_1 u_1 \left(I_1 + \frac{u_1^2}{2}\right). \qquad \text{(VIII-3a)}$$

Это выражение мы должны приравнять такому же выражению с индексом 2, которое даст нам количество энергии, уносимой вытекающим веществом в единицу времени, и работу, производимую газом против сил давления на контрольной поверхности B. Сокращая полученное уравнение на величину $\varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2$, т. е. относя все величины не к единице поверхности ударной волны и единице времени, как это мы делали раньше, а к единице массы протекающего вещества, мы получим третье основное уравнение в следующем виде:

$$I_1 + \frac{u_1^2}{2} = I_2 + \frac{u_2^2}{2}. \qquad \text{(VIII-3)}$$

Здесь мы снова ввели энтальпию $I = E + pv = E + \frac{p}{\varrho}$. Все уравнения симметричны относительно перестановки индексов 1 и 2. Из трех уравнений нетрудно исключить две скорости u_1 и u_2 с тем, чтобы получить связь между величи-

64

нами давления и плотности до и после волны, так называемое уравнение адиабаты Гюгонио.

Из первых двух уравнений, не привлекая уравнения сохранения энергии, найдем:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}; \qquad u_1^2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{p_2 - p_1}{\varrho_2 - \varrho_1}; \qquad u_2^2 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\frac{p_1 - p_2}{\varrho_1 - \varrho_2};$$

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{(\varrho_1 + \varrho_2)(p_1 - p_2)}{\varrho_1 \varrho_2}. \qquad \text{(VIII-4)}$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение, получим искомое уравнение адиабаты Гюгонио:

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2\varrho_1\varrho_2}(\varrho_1 + \varrho_2)(p_1 - p_2), \qquad \text{(VIII-5)}$$

или

$$E_1 - E_2 = \frac{1}{2\varrho_1\varrho_2}(\varrho_1 - \varrho_2)(p_1 + p_2). \qquad \text{(VIII-6)}$$

Для того чтобы отсюда получить в явном виде связь плотности и давления после сжатия в волне, необходимо выразить энтальпию или энергию через давление и плотность. Для идеального газа, теплоемкость которого мы считаем постоянной в интересующем нас интервале температуры между T_1 и T_2,

$$I = c_p T = \frac{c_p}{R} RT = \frac{c_p}{R} pv = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\varrho},^{1}$$

мы получим посредством простых преобразований закон связи плотности и давления для вещества, проходящего через разрыв, уравнение адиабаты Гюгонио:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{(k+1)p_2 + (k-1)p_1}{(k-1)p_2 + (k+1)p_1}; \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\varrho_2 - (k-1)\varrho_1}{(k+1)\varrho_1 - (k-1)\varrho_2}. \qquad \text{(VIII-7)}$$

Уравнения приобретают более простой вид, если повсюду, вместо плотности, ввести обратную величину удельного объема:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2}; \quad u_1^2 = v_1^2\frac{p_2 - p_1}{v_1 - v_2}; \quad u_2^2 = v_2^2\frac{p_1 - p_2}{v_2 - v_1};\\ &u_1 - u_2 = \sqrt{(p_1 - p_2)(v_2 - v_1)};\\ &u_1^2 - u_2^2 = (v_1 + v_2)(p_2 - p_1); \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII-8)}$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(p_1 - p_2);\\ E_1 - E_2 &= \frac{1}{2}(v_2 - v_1)(p_1 + p_2); \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII-9)}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{(k-1)p_2 + (k+1)p_1}{(k+1)p_2 + (k-1)p_1}; \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)v_1 - (k-1)v_2}{(k+1)v_2 - (k-1)v_1} \qquad \text{(VIII-10)}$$

[1] Постоянное слагаемое, которое появится в I, если теплоемкость ниже T_1, отличается от теплоемкости в интервале от T_2 до T_1, входящей

5 Я. Б. Зельдович 65

Может быть, логически более простым является другой, физически совершенно эквивалентный предыдущему, вывод уравнения адиабаты Гюгонио, в котором мы непосредственно исходим из рассмотренной ранее задачи о движении поршня в газе. В этом случае нам не придется оперировать понятиями потока энергии и потока количества движения, что может представить некоторые преимущества для неискушенного читателя.

Рассмотрим трубку поперечным сечением в 1 см², закрытую поршнем в начале координат. В момент времени $t = 0$ начнем двигать поршень с постоянной скоростью w и будем искать режим движения, изображенный на рис. 24, при котором впереди поршня с постоянной скоростью D распространяется разрыв всех величин — плотности, скорости, давления. Справа, впереди разрыва, вещество совершенно не возмущено, сохраняет свое начальное давление p_1, начальную плотность ϱ_1 и неподвижно. В промежутке между поршнем и разрывом вещество имеет какие-то другие, постоянные на всем протяжении между поршнем и разрывом значения плотности ϱ_2 и давления p_2, и движется со скоростью, равной скорости поршня $u = w$.

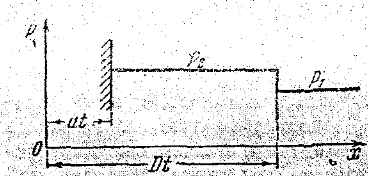


Рис. 24. Распределение давления в пространстве при движении ударной волны, вызванной сжатием газа поршнем.

Рассмотрим состояние, которое получится при таком режиме через время t. За это время разрыв уйдет на расстояние Dt. Количество вещества, которое подверглось сжатию за это время, равно $\varrho_1 Dt$. Мы должны приравнять его количеству вещества, которое мы найдем в сжатом до плотности ϱ_2 газе между поршнем, продвинувшимся на расстояние ut, и разрывом:

$$\varrho_1 Dt = \varrho_2 (D - u)t. \qquad \text{(VIII-11)}$$

Указанное количество вещества приобрело скорость, равную скорости движения поршня. Общее количество движения, приобретенное газом, заключенным в трубке, за время t составляет $\varrho_1 Dut$. Мы должны приравнять приращение количества движения импульсу сил давления, т. е. произведению силы, равной разности давления, оказываемого поршнем, и противостоящего ему давления невозмущенного газа, на время действия силы:

$$\varrho_1 Dut = (p_2 - p_1)t. \qquad \text{(VIII-12)}$$

в формулы, может быть устранено соответствующим выбором точки отсчета энергии. Во всяком случае, постоянное слагаемое выпадает из уравнения вида (VIII-5) и (VIII-6).

66

Наконец, приращение энергии вещества при сжатии мы приравниваем работе, производимой поршнем, т. е. работе, которую произвела внешняя сила, перемещающая поршень, за время t. Численно сила для площади поршня в 1 см^2 равна p_2, пройденный поршнем путь равен ut, работа равна p_2ut.

Так мы получим последнее уравнение — уравнение энергии:

$$\varrho_1 Dt\left(E_2 + \frac{u^2}{2} - E_1\right) = p_2ut. \qquad \text{(VIII-13)}$$

Очевидно, что эти уравнения совершенно тождественны ряду уравнений, которые мы вывели раньше, и получатся из них при переходе к системе координат, равномерно движущейся относительно системы, выбранной сейчас. При этом скорость распространения разрыва D у нас ранее обозначалась u_1, так что теперь $D = u_1$, а скорость движения поршня $u = u_1 - u_2$. Мы представляем читателю доказательство того, что последние три уравнения (VIII-11, VIII-12, VIII-13) приводят к такому же выражению адиабаты Гюгонио (VIII-5, VIII-6).

§ X. История вопроса об ударной волне

Уравнение связи между давлением и плотностью в веществе, подвергшемся действию ударной волны, выведенное нами из элементарных соображений и рассмотрения законов сохранения, привело к неожиданному результату — росту энтропии при сжатии идеального газа ударной волной. При этом рост энтропии получается непосредственно из сопоставления начального и конечного состояний вещества, которые связаны между собой уравнениями сохранения. Мы не рассматривали процессы, протекающие между контрольными поверхностями A и B (рис. 23*б*), которые привели к росту энтропии. Формально одни уравнения сохранения, как мы уже указывали, симметричны относительно ϱ_1, p_1 и ϱ_2, p_2. Уравнениям сохранения мы могли бы удовлетворить также, рассматривая обратное движение — волну разрежения, в которой разрежение происходило бы внутри какого-то, ближе не рассматриваемого, малого интервала AB в согласии с уравнением Гюгонио. Однако такое движение в действительности является невозможным, как это следует из того, что в нем имело бы место падение энтропии (упомянутая выше так называемая теорема Цемплена [99]). Вот эта особенность результата § IX, в котором мы, не рассматривая диссипативных процессов, пришли к изменению энтропии, создает определенные трудности в понимании теории ударной волны, которые могут быть полностью устранены лишь в том случае, если мы рассмотрим процессы внутри самой области изменения состояния (между контрольными поверхностями A и B рис. 23*б*) и которые значительно задержали развитие теории ударной волны.

Замечательно, что три первые важнейшие работы по теории ударных волн были произведены, хотя и в разное время, но, повидимому, совершенно независимо одна от другой. Это даст нам возможность рассматривать их не в хронологическом порядке, ибо безотносительно к тому, какая работа была календарно сделана раньше, по содержанию эти работы совершенно независимы.

73

Риман [81] в своем мемуаре, составив первые два уравнения, — сохранения вещества и сохранения количества движения, в качестве третьего уравнения принимает уравнение Пуассона, т. е. заранее задает сохранение энтропии в ударной волне, по аналогии с сохранением *энтропии в движениях безударных* волн, в которых действие диссипативных сил — вязкости и теплопроводности не рассматривается. Полученное им соотношение между давлением и плотностью и общая картина движения обладают рядом общих черт с истинной картиной. Однако уравнения Римана приводят к тому, что закон сохранения энергии оказывается невыполненным. Поэтому мы должны признать их ошибочными.

Любопытно, что даже в издании 1925 г. известной книги „Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики", составленной Вебером по лекциям Римана [97], после того как весь вопрос был полностью выяснен, Вебер попрежнему выражает странные сомнения — не могут ли при учете турбулентности все же иметь место уравнения Римана.

Вывод Гюгонио [56], с именем которого принято связывать уравнение (VIII-7), воспроизведен нами в предыдущем параграфе.

Мы перейдем сейчас к мемуару Ренкина [78], наиболее интересному с точки зрения физической газодинамики, с точки зрения отчетливого понимания сущности происходящих в ударной волне явлений.

Ренкин рассматривает движение, которое могло бы распространяться неограниченно далеко, не меняя своей формы, т. е. рассматривает стационарно распространяющееся по газу возмущение. Таким же способом, который мы применили в выводе *адиабаты Гюгонио*, Ренкин выделяет две контрольные плоскости и составляет закон сохранения вещества и закон сохранения количества движения. Ренкин рассматривает вещество, хотя и не обладающее вязкостью, но обладающее теплопроводностью. У него сформулированы важнейшие для ударных волн принципы автомодельности. Именно, Ренкин особенно подчеркивает, что численно коэффициент теплопроводности вещества может быть сколь угодно мал, но тем не менее в ударной волне мы не можем им пренебречь, потому что заранее никак не задана сама ширина волны, не задана величина градиентов в ударной волне. Чем меньше коэффициент теплопроводности, тем бóльших градиентов мы можем ожидать в ударной волне, так что произведение градиента температуры на коэффициент теплопроводности (равное количеству тепла, переносимого теплопроводностью в единицу времени) может оставаться конечным при стремлении самого коэффициента теплопроводности к нулю. Этим кладется основа отчетливого понимания того, как можно пренебрегать диссипативными силами, в частности теплопроводностью, там, где величина градиентов определена извне, заранее задана самими уравнениями движения без *теплопроводности*, и почему нельзя пренебрегать теплопроводностью там, где величина градиента сама по себе не определена. Примером первого рода является волна разрежения, для которой мы построили решение в предположении отсутствия теплопроводности. Мы нашли, что ширина волны разрежения того же порядка, что и пройденное возмущением расстояние, ширина волны разрежения линейно растет со временем и по порядку величин равна

$$\Delta x = \frac{\Delta p}{p} ct.$$

Если мы будем считать это первым приближением, поскольку в построении волны разрежения не учитывались теплопроводность и вязкость, и захотим в следующем приближении учесть действие теплопроводности и вязкости на поля температуры и скорости, найденные в первом приближении, то увидим, что чрезвычайно *скоро* все градиенты окажутся настолько малыми, что теплопроводность и вязкость практически совершенно не будут влиять на результат. Не то в ударной волне. Если за первое приближение мы захотели бы принять бесконечно крутой разрыв, который получается при равных нулю теплопроводности и вязкости, то в следующем приближении, вводя теплопроводность и вязкость, мы получили бы бесконечные потоки тепла, бесконечно большое возрастание энтропии. В случае ударной волны, где уравнения движения без теплопроводности и вязкости не дают никакого определенного значения ширины волны, величина градиентов и связанная с ней ширина волны могут быть получены только из рассмотрения диссипативных сил, и при этом ширина оказывается как раз такой, чтобы дать требуемое уравнениями сохранения возрастание энтропии. При этом, обратно, если в волне разрежения при конечной, соизмеримой с размерами системы ширине мы могли пренебречь действием диссипативных сил, то в ударной волне, *для того чтобы диссипативные* силы давали конечное возрастание энтропии, необходимо, чтобы ширина ударной волны была весьма мала по сравнению с размерами системы. *Благодаря* этому везде, кроме поверхностей ударных волн, мы и можем исключить диссипативные силы. Качественно *для* частного случая, когда единственным диссипативным фактором *является* теплопроводность вещества, эти соотношения совершенно отчетливо выяснены Ренкиным.

Дальнейшее изложение Ренкина страдает излишней сложностью. Так, *уравнение* энергии он составляет совершенно правильно, однако в общем случае произвольного вещества Ренкин не выражает внутреннюю энергию в явной форме, как

74 75

функцию давления и плотности; вместо этого он пользуется общими термодинамическими соотношениями, включающими энтропию.

На процессы переноса тепла внутри разрыва Ренкин накладывает условие: $\int T\,dS = 0$, физический смысл которого заключается в том, что в ударной волне происходит лишь о б м е н тепла между соседними слоями, так что количество тепла, отнятое от одного слоя, равно количеству тепла, полученному другим, — нет внешних источников тепла.

В комбинации с общими термодинамическими соотношениями Ренкин, правда не без труда, получает систему уравнений, эквивалентную системе уравнений § VIII, и выписывает уравнения для идеального газа. Таким образом, из содержащихся в работе Ренкина формул уравнение адиабаты Гюгонио в его обычной форме VIII-10 могло бы быть получено элементарными алгебраическими преобразованиями. Напомним, что работа Ренкина на 15 лет опередила мемуар Гюгонио.

Рейлэй [79], подводя в 1910 г. итоги истории ударных волн, особенно подчеркивает несправедливость, заключающуюся в термине „адиабата Гюгонио".

Из отдельных указаний любопытно отметить, что еще в 1858 г. весьма близок к созданию теории ударных волн был английский священник Ирншоу [49]. Подобно Риману, он исходил из рассмотрения волны сжатия конечной ширины, в которой (см. § II) гребень волны перегоняет область низкого давления, приводя к образованию разрыва. Однако, подойдя вплотную к уравнениям, Ирншоу неожиданно делает вывод, что природа не терпит скачков, и говорит нечто невразумительное об отражениях, о том, что природа как-нибудь да избежит возникновения ударной волны, возникновения разрыва. Мы видим здесь очень наглядный и поучительный пример дурного влияния ошибочной философии на научные исследования.

В более позднее время, уже после открытий Римана, Ренкина и Гюгонио, французский ученый Пьер Дюгем (один из вождей модного в начале XX в. течения „энергетиков") отрицал существование ударных волн на том основании, что в уравнениях газодинамики с вязкостью и теплопроводностью не может быть строгого разрыва [46, 47]. Ученик Дюгема Эмиль Жуге вслед за Ренкиным указал на то, что диссипативные силы приводят к весьма малой ширине, пренебрегая которой можно говорить о разрыве, ударной волне; Жуге не только выяснил заблуждение Дюгема, но и значительно продвинул вперед теорию ударных и детонационных волн [58, 59, 60].

Однако, в связи с замечаниями Дюгема, во французской литературе до сих пор часто говорят о „квазиволнах" („почти волнах"), имея в виду конечную ширину фронта.

76

В сущности, здесь мы касаемся общего вопроса о значении и смысле приближенных методов, приближенных решений в физике (см. замечательную статью В. А. Фока [29]), вопроса о том, когда приближенное выполнение тех или иных соотношений оправдывает создание новых качественных понятий.

Ренкин касается также вопроса о волнах разрежения и ссылается на устное сообщение Томсона, согласно которому волна разрежения должна быть неустойчивой механически. В *действительности невозможность волны разрежения*, при том именно н е в о з м о ж н о с т ь, а не неустойчивость ее, уже заключена в ходе мысли самого Ренкина. Действительно, если мы рассматриваем процессы теплопроводности внутри волны, то, кроме уравнения сохранения, написанного Ренкиным: $\int T\,dS = 0$, *уравнения, которое выражает, что в процессе* теплопроводности количество тепла, полученное одними слоями, равно количеству тепла, отданному другими слоями, мы должны хотя бы качественно учесть тот элементарный факт, что в процессе теплопроводности тепло всегда переходит от тела более горячего к телу более холодному. Отсюда, естественно, мы получим, что в ударной волне энтропия может только возрастать. Таким образом, если бы мы попытались построить волну разрежения, обратив в ударной волне все скорости движения, то внутри фронта ударной волны, внутри „разрыва" мы столкнулись бы с необходимостью обратить также поток тепла и осуществить переход тепла от более холодных к более горячим слоям газа, что невозможно. Остается пожалеть, что эти элементарные соображения иногда игнорируются и в современной литературе (см. гл. I ценной в других отношениях книги Власова [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. В л а с о в О. Е. Взрывные волны, Воен.-инж. акад., Москва, 1937.
2. Ф о к В. А. Принципиальное значение приближенных методов в физике. Успехи физич. наук, 16, 1070, 1936.
3. D u h e m P. Course d'Hydrodynamique. 1900. [Курс гидродинамики.]
4. D u h e m P. Comptes Rendues, 141, 811, 1905; 142, 324, 377, 431, 612, 750, 1906; 144, 179, 1907. [К теории ударных волн.]
5. E a r n s h a w Reverend Samuel. Philos. Trans., 150, 133, 1858. [Математическая теория звука.]
6. H u g o n i o t H. Journ. école Plytechn., 57, 1887; 58, 1889. [О распространении движения в телах (теория ударных волн и волн разрежения).]
7. J o u g u e t E. Comptes Rendues; 138, 786 и 1685, 1904. [Термодинамическая теория ударной волны.]
8. J o u g u e t E. Journ de Mathem., 6, 5, 1904. [Теория ударных и детонационных волн.]
9. J o u g u e t E. Mécanique des Explosifs. Paris, 1917. [Механика взрывчатых веществ.]
10. R a n k i n e. Philos. Trans., 160, 277, 1870. [Волны конечной амплитуды в воздухе. Термодинамическая теория.]
11. R a y l e i g h. Proc. Roy. Soc., 84, 247, 1910. [Волны конечной амплитуды: толщина фронта, ударные волны при сверхзвуковом обтекании.]
12. R i e m a n n B. Adhandl. d. Gesellsch. d. Wissensch. in Guttingen. Math.-Phys. Klasse, 8, 43, 1860. Gesammelte Werke, стр. 144, 1876. [Распространение плоских воздушных волн конечной амплитуды. Первая работа по теории ударных волн.]
13. W e b e r H. Riemann – Weber, Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik, Bd. II, изд. 1919 и 1925. [Курс математической физики, глава об уравнениях газодинамики.]
14. Z e m p l e n. Comptes Rendues, 141, 712, 1905; 142, 142, 1906. [О невозможности ударных волн разрежения.]

К ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О РАЗРЫВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ*

Г.Г. Черный
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова
E-mail: ggcher@amgd.ru

Эта публикация подготовлена автором с существенным использованием материала, заимствованного им из принадлежащего К. Трусделлу (C. Trusdell) предисловия к современному переизданию Собрания сочинений Дж. Г. Стокса (Stokes' collected Mathematical and Physical Papers, *vol. I, Johnson Reprint, New York, 1966) и из* некоторых других источников (в частности, учебника Ph.A. Tompson, Compressible-Fluid Dynamics, Mc Graw-Hill, New York – Toronto, 1972, в котором помещена краткая историческая ремарка о переписке Стокса и Рэлея, также заимствованная из предисловия Трусделла).

По-видимому первым, кто указал на образования поверхности разрыва газодинамических величин при «опрокидывании» бегущей волны, был Стокс (George Gabriel Stokes).

В заметке «Об одной трудности в теории звука» (G.G. Stokes, On a Difficulty in the Theory of Sound, Phil. Mag., 3, 33, 1848) Стокс, отметив, что профиль волны плотности (и скорости) некоторого вида становится бесконечно крутым за конечное время, пишет: «Конечно, начиная с момента, в который выражение (А) становится бесконечным, возникает то или иное движение, и хотелось бы знать, какова природа этого движения. По-видимому, наиболее естественно предположить для последующей проверки (trial), что образуется поверхность разрыва, при переходе через которую плотность и скорость меняются скачком (abrupt). Покажем, что существование такой поверхности возможно...».

Далее Стокс выводит два соотношения – уравнение сохранения массы и уравнение сохранения количества движения, - которые должны выполняться на стационарной поверхности разрыва в одномерном движении.

Однако, при перепечатке заметки в 1883 г. в своем Собрании сочинений Стокс отказывается от утверждения в последней цитированной фразе о возможности существования поверхности разрыва, поместив к ней сноску: «Это не так: смотри добавленный параграф в конце». В этом параграфе он объяснил, что сэр Вильям Томсон и позднее независимо лорд Рэлей указали ему, что предположение о разрывном движении входит в противоречие с принципом сохранения энергии.

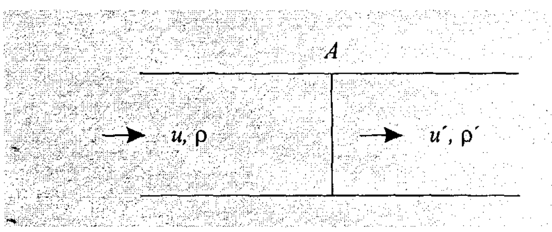
По-видимому, дальнейший текст заметки с выводом соотношений на поверхности разрыва и аргументацией возможности ее существования *был Стоксом исключен при помещении заметки* в Собрание сочинений**.

Возражение Рэлея Стоксу (кстати, Рэлей – бывший студент Стокса) о возможности существования поверхности разрыва было высказано им почти через 30 лет после публикации упоминавшейся работы. Рэлей в это время готовил к изданию свою «Теорию звука» и обратился к Стоксу с следующим письмом***.

4 Карлтон Гарденс, S.W.
2 июня 1877 г.

Дорогой проф. Стокс,

В продолжение нашего недавнего вечернего разговора я посмотрел Вашу работу «Об одной трудности в теории звука», Phil. Mag., Nov. 1848. Последняя половина работы кажется мне доступна возражению, по поводу которого (если у Вас будет время взглянуть на предмет) я был бы рад слышать Ваше мнение.



Придавая всей жидкости соответствующую скорость, поверхность раздела A можно привести в состояние покоя. После этого пусть скорости и плотности с двух сторон будут u, ρ, u', ρ'.

Тогда из условия неразрывности

$$u\rho = u'\rho'.$$

* Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ и Фонда содействия науке.

** Мне не удалось найти издание 1883 г., но редактор переиздания Собрания сочинений 1966 г. К. Трусделл в предисловии к Собранию пишет: «Исключенные страницы, которые содержат наиболее ранний анализ ударных волн и самое первое появление того, что мы называем «соотношениями Рэнкина-Гюгонио», вставлены в настоящее переиздание тома 2 в качестве приложения в конце работы».

*** Письмо Рэлея Стоксу и ответ Стокса цитируются далее (в переводе на русский) по тексту упомянутого предисловия Трусделла. В свою очередь, Трусделл цитирует письма по изданию Memoir and Scientific Correspondence of the late Sir George Gabriel Stokes, ed. J. Larmor, Cambridge Univ. Press, 1907, 2.

Количество движения, покидающее сечение A в единицу времени $=\rho u \cdot u'$, *входящее количество движения* $=\rho u^2$.

Таким образом

$$p - p' = a^2(\rho - \rho') = \rho u(u' - u)$$

Из этих двух уравнений

$$u = a\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}, \quad u' = a\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}.$$

Это, я думаю, Ваш вывод, и Вы отсюда делаете заключение о возможности движения. Однако, энергетическое условие налагает на u *и* u' *другую связь, а именно*

$$u'^2 - u^2 = 2a^2 \log\frac{\rho}{\rho'},$$

*так что энергия теряется или приобретается на поверхности раздела A**.

Поэтому представляется, что при сделанных допущениях разрывные изменения невозможны.

Я изложил суть очень кратко, но смею думать, что сказанное мной будет Вам понятно.

Стокс, имевший репутацию скромного и застенчивого человека, уже через три дня пишет ответное письмо Рэлею, соглашаясь с его возражением.

Кембридж
5 июня 1877 г.

Дорогой лорд Рэлей,

*Спасибо Вам за указание возражения против странного (queer) вида движения, о котором я размышлял в работе, на которую Вы ссылаетесь. Сэр В. Томсон указал мне то же самое много лет тому назад***, *и я упомянул бы об этом, представься мне случай писать что-либо, относящееся к предмету, или, в ином случае, если бы моя работа привлекла внимание. Кажется, однако, что едва ли стоит удостаивать критики отрывок из работы, похороненной среди другой научной старины.*

P.S. Вы заметите, что о возможности такого странного движения я писал с некоторым сомнением.

Видимо, Рэлея вполне удовлетворил ответ Стокса.

В его «Теории звука» (1894, т. 2, стр. 40) появились слова: «... было бы, однако, недопустимо обойти молчанием ошибку, касающуюся вопроса о разрывном движении, в которую впали Риман и другие авторы. Ими считалось, что возможно такое состояние движения, при котором жидкость (fluid) разделяется на две части поверхностью разрыва, причем вся жидкость по одну сторону от поверхности разрыва имеет одну плотность и скорость (одинаковую во всей этой части), а по другую сторону – другую плотность и скорость, одинаковую в данной части».

Далее следует то же доказательство невозможности таких движений, что и приведенное им в письме Стоксу.

И это Рэлей написал после того, как уже были опубликованы работы и Рэнкина, и Гюгонио, а ударные волны наблюдались в опытах Э.Маха и описаны им в ряде работ, начиная с 1875 г. (Mach E. B Woszka, Sitzungber. der Wiener Akad., 72, 1875).

Любопытно, что и в последующих переизданиях «Теории звука» все это осталось без изменений (см. в русском переводе с третьего английского издания: Дж.В. Стретт (лорд Рэлей) "Теория звука", том II, ГИТТЛ, М.; 1955; стр. 48).

Как курьез, в дополнение к тому, что говорится в помещенном выше §10 книги Я.Б. Зельдовича о воспроизведении ошибки Римана в издании [13] даже в 1925 г., упомянем еще широко известную книгу Хораса Лэмба «Гидродинамика». Впервые эта книга была издана в 1879 г., впоследствии она неоднократно переиздавалась, значительно пополняясь автором в объеме; последнее прижизненное издание было в 1932 г. В §284, продолжая рассмотрение волн конечной амплитуды, Лэмб пишет***: «Условия распро-

* Здесь Рэлей исходит из ложного убеждения в том, что внутри тонкого переходного слоя, заменяемого Стоксом поверхностью разрыва, течение баротропно. Для такого течения энергетическое соотношение выражается уравнением Коши-Лагранжа, в стационарной волне – это уравнение Бернулли. В приведенном в письме виде энергетическое соотношение справедливо для изотермического течения. В работе Стокса 1848 г. никаких слов о внутренней структуре разрыва нет.

** Переписка между Стоксом и В. Томсоном (лордом Кельвином) не публиковалась. Письма хранятся в университетской библиотеке Кембриджа.

*** Далее цитирование идет по тексту русского перевода с издания 1932 г. (Г. Ламб «Гидродинамика», ОГИЗ, ГТТИ; М.-Л., 1947).

странения волн установившегося типа были очень простым способом исследованы Ранкином*... Сначала Стокс, а позднее и многие другие авторы показали, что в случае такого рода волн должны выполняться как условие постоянства массы, так и условие постоянства количества движения. Простейшим случаем будет тот, когда величины ρ и *u* остаются всюду постоянными, кроме плоскости разрыва, где они претерпевают изменения.

Против этих результатов можно, однако, сделать то возражение**, что для действительных жидкостей уравнение энергии не может иметь место одновременно с равенствами (1) и (2)***. Если мы вычислим избыток работы, которая производится в единицу времени силами давления, приложенными к жидкости, втекающей через сечение В в пространство АВ, над той работой, которую за то же время производит давление жидкости, вытекающей через сечение А, и вычтем отсюда приращение кинетической энергии, то получим

$$\frac{1}{2}(p_1 + p_0)(v_0 - v_1), \qquad (11)$$

где буква v поставлена, как и раньше, вместо $\frac{1}{\rho}$.

Если обозначить на диаграмме Уатта**** через *A* и *B* два состояния среды, то выражение (11) будет измерять площадь между прямой *AB*, осью v и ординатами точек *A* и *B*. Если бы переход от состояния В к состоянию А на каждой стадии процесса мог быть осуществлен без притока или потери тепла, то соответствующие точки диаграммы лежали бы на одной и той же «адиабатической кривой» и приращение внутренней энергии было бы представлено площадью, заключенной между этой кривой, осью v и крайними ординатами. Для действительных газов адиабата обращена вогнутостью кверху и потому последняя из названных площадей (по абсолютному значению) меньше, чем первая. Если мы обратим внимание на знак площади, то увидим, что для волны сгущения ($v_1 < v_0$) работа внешнего давления была бы больше, чем приращение кинетической и внутренней энергии; в случае же волны разрежения ($v_1 > v_0$), наоборот, отданная работа больше, чем соответствующая ей кажущаяся потеря энергии»*****.

Все приведенное показывает, с каким трудом формировалось представление о движениях с поверхностями разрыва.

Нелегко и не сразу даже к выдающимся ученым приходило осознание поверхности разрыва как предела непрерывных движений среды с более сложными свойствами (в нашем случае – с диссипативными эффектами) и, особенно, понимание того, что вследствие проявления диссипативных эффектов внутри тонкого слоя, заменяемого в пределе поверхностью разрыва, энтропия при адиабатическом переходе через разрыв должна возрастать. Вот что сказано об этом во введении к той же книге Я.Б. Зельдовича: «Ударные волны представляют особенный интерес с целого ряда точек зрения и будут центральным вопросом предлагаемой книги. С одной стороны там, где попытки интегрирования уравнений без введения разрывов, (т.е. ударных волн), приводят к тем или иным парадоксам и к невозможности решения этих уравнений, теория ударных волн разрешает парадоксы и позволяет сконструировать режим движения при любых условиях.

С другой стороны, ударные волны сами представляют собой парадоксальное явление. Они парадоксальны в том смысле, что, не вводя никаких предположений о диссипативных силах – о вязкости и теплопроводности, мы из элементарных соображений получаем законы ударных волн, в которых заключено возрастание энтропии, т.е. законы, в которых заключена необратимость процессов, происходящих в ударной волне.

С этой точки зрения ударные волны представляют значительный логический интерес, даже безотносительно к их применению.

Замечательно, что все основные соотношения и основные принципиальные точки зрения были

* Дана ссылка на работу, цитированную в списке литературы на стр. 88. (Г.Ч.)

** См. предыдущую ссылку.

*** Речь идет о приведенных ранее равенствах

$$\rho_1(c-u_1)=\rho_0(c-u_0)=m; \quad (1)$$

$$p_1-p_0=m(u_0-u_1), \quad (2)$$

**** Имеется ввиду плоскость v, p (Г.Ч.)

***** В некоторых исследованиях Гюгонио (которые Адамар в своих «Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique», Париж, 1903, развивает дальше) доказательство, приведенное в тексте, обращено. При *предположении* возможности волны разрыва оказывается, что уравнение энергии может быть удовлетворено, если выражение (10) положить равным приращению внутренней энергии [см. § 10 (8)]. На основании такого предположения Гюгонио делает заключение, что переход от одного состояния к другому происходит по закону

$$\frac{1}{2}(p_1 + p_0)(v_0 - v_1) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1 v_1 - p_0 v_0).$$

«Таково соотношение, которое Гюгонию поставил на место закона [$pv^\gamma = const.$], чтобы выразить, что внезапное сгущение или разрежение происходит без поглощения или выделения тепла. Эту зависимость называют динамическим адиабатическим законом, соотношение же [$pv^\gamma = const.$], которое имеет место в случае медленных изменений, называют статическим адиабатическим законом» (Hadamard, p. 192). Однако, для такого закона не даны какие-либо физические основания. (Подчеркнуто мною, Г.Ч.).

установлены из рассмотрения общих уравнений газовой динамики более 50 лет тому назад, т.е. в то время, когда не было еще никакого опытного материала, до того, как ударная волна была изучена экспериментаторами.

По образному выражению Эмиля Жуге, «ударная волна впервые появилась на кончике пера теоретиков».

Приходится удивляться глубине анализа и мощи теоретического проникновения великих умов прошлого века, прежде всего немецкого математика Бернгарда Римана, английского физика Ренкина, французского артиллериста Гюгонио, с разных сторон и независимо друг от друга создавших теорию ударных волн, не потерявшую значения до настоящего времени».

Как видно из вышеизложенного, обстоятельства сложились так, что сейчас имя Стокса вовсе не упоминается, когда речь идет о соотношениях на поверхности разрыва в идеальном газе; за этими соотношениями прочно закрепилось наименование «соотношение Рэнкина-Гюгонио». Стокс поддался аргументации Томсона и Рэлея об ошибочности его заключения о возможности существования поверхности разрыва, хотя сама эта аргументация оказалась неверной.

В заключение, хотя и за рамками темы настоящей публикации, приведу дополнительно интересный факт, касающийся научной биографии Стокса.

Трусделл сообщает еще об одном случае, когда Стокс тоже упустил шанс связать свое имя с интересным и важным научным результатом. В ранних рукописях Стокса сохранилось полученное им решение задачи об установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе и между параллельными стенками (профили скорости этих течений носят названия профилей Хагена-Пуазейля и Куэтта, соответственно). Поводом для отказа от публикации полученных результатов, как написал сам Стокс в Собрании сочинений послужило следующее: «Подсчитав, в соответствии с упомянутыми условиями, расход через длинную прямую трубу кругового сечения и канал прямоугольного сечения и сравнив полученные формулы с некоторыми экспериментами Боссю и Дюбуа, я нашел, что эти формулы совершенно не согласуются с экспериментом». На самом же деле сравнение было неадекватным: опыты проводились в условиях турбулентного течения воды. Этого не учел Стокс.

Выражаю благодарность Г.К. Михайлову за содействие в полученнии копии предисловия К.Трусделла.